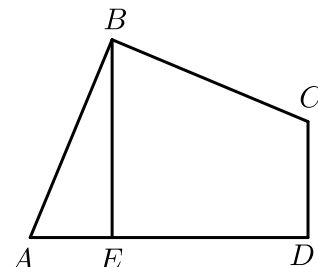


第1讲 正方形中的悬挂与手拉手模型（练习）

一、悬挂模型

1. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = BC$ ， $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$ ， $BE \perp AD$ 于点 E ，且四边形 $ABCD$ 的面积为8，则 $BE = (\quad)$ 。



A. 2

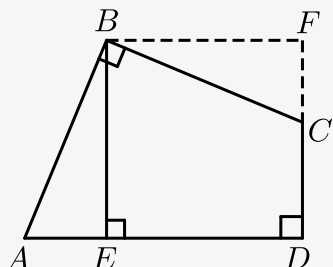
B. 3

C. $2\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】过 B 点作 $BF \perp CD$ ，与 DC 的延长线交于 F 点，



$$\because \angle FBC + \angle CBE = 90^\circ, \angle ABE + \angle EBC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FBC = \angle ABE,$$

在 $\triangle BFC$ 和 $\triangle BEA$ 中，

$$\begin{cases} \angle F = \angle AEB \\ \angle CBF = \angle ABE, \\ BC = AB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BFC \cong \triangle BEA \text{ (AAS)},$$

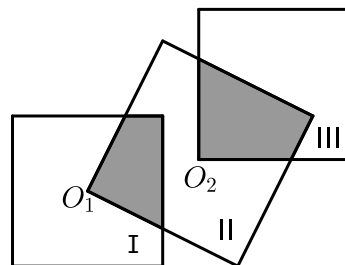
$$\text{则 } BE = BF, S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\text{正方形}BEDF} = 8,$$

$$\therefore BE = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

故选：C。

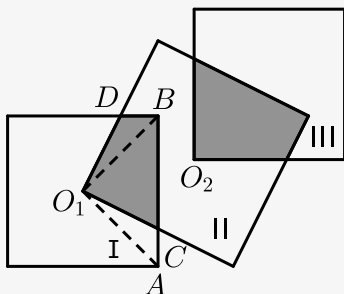
【标注】【知识点】对角互补模型

2. 有若干个边长都为2的小正方形．若小正方形Ⅱ的一个顶点在小正方形Ⅰ的中心 O_1 ，如图所示；类似地小正方形Ⅲ的一个顶点在小正方形Ⅱ的中心 O_2 ，并且小正方形Ⅰ与小正方形Ⅲ不相重叠，如果若干个小正方形复制形都按这种方法拼接，则需要 _____ 个小正方形能使拼接出的图形的阴影部分的面积等于一个小正方形的面积．



【答案】 5

【解析】



需要5个小正方形能使拼接出的图形的阴影部分面积等于一个小正方形的面积．

对于正方形Ⅰ与正方形Ⅱ，

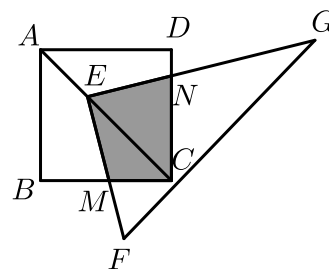
易证得 $\triangle CAO_1 \cong \triangle DBO_1$ ，即 $S_{\triangle CAO_1} = S_{\triangle DBO_1}$ ，

故 $S_{DBAO_1} = S_{\triangle BAO_1}$ ．

即正方形Ⅰ与正方形Ⅱ重合部分的阴影部分面积为正方形面积的 $\frac{1}{4}$ ．

【标注】【知识点】对角互补模型

3. 如图，点 E 在正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 上，且 $EC = 2AE$ ，直角三角形 FEG 的两直角边 EF ， EG 分别交 BC ， DC 于点 M ， N ，若正方形 $ABCD$ 的边长为3，则重叠部分四边形 $EMCN$ 的面积为 _____ ．



【答案】 4

【解析】 过 E 作 $EP \perp BC$ 于点 P ， $EQ \perp CD$ 于点 Q ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle BCD = 90^\circ$ ，

又 $\because \angle EPM = \angle EQN = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle PEQ = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle PEM + \angle MEQ = 90^\circ$ ，

$\because$ 三角形 FEG 是直角三角形，

$\therefore \angle NEF = \angle NEQ + \angle MEQ = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle PEM = \angle NEQ$ ，

$\because AC$ 是 $\angle BCD$ 的角平分线， $\angle EPC = \angle EQC = 90^\circ$ ，

$\therefore EP = EQ$ ，四边形 $PCQE$ 是正方形，

在 $\triangle EPM$ 和 $\triangle EQN$ 中，

$$\begin{cases} \angle PEM = \angle NEQ \\ EP = EQ \\ \angle EPM = \angle EQN \end{cases},$$

$\therefore \triangle EPM \cong \triangle EQN (ASA)$ ，

$\therefore S_{\triangle EQN} = S_{\triangle EPM}$ ，

$\therefore$ 四边形 $EMCN$ 的面积等于正方形 $PCQE$ 的面积，

$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为3，

$\therefore AC = 3\sqrt{2}$ ，

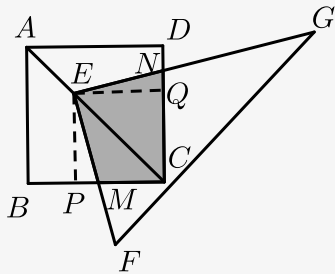
$\because EC = 2AE$ ，

$\therefore EC = 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore EP = PC = 2$ ，

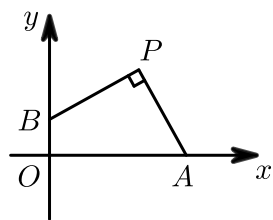
$\therefore$ 正方形 $PCQE$ 的面积 $= 2 \times 2 = 4$ ，

$\therefore$ 四边形 $EMCN$ 的面积 $= 4$ ，故答案为：4.



【标注】 【知识点】 正方形与全等综合

4. 如图，点 P 的坐标为 $(2, 2)$ ，点 A, B 分别在 x 轴， y 轴的正半轴上运动，且 $\angle APB = 90^\circ$ ，下列结论：



- ① $PA = PB$;
- ② 当 $OA = OB$ 时四边形 $OAPB$ 是正方形;
- ③ 四边形 $OAPB$ 的面积和周长都是定值;
- ④ 连接 OP, AB ，则 $AB > OP$,

其中正确的命题有 () .

A. ①②

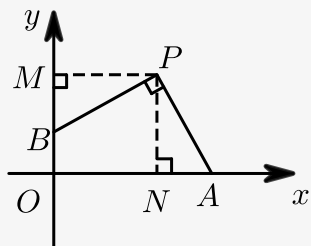
B. ①②③

C. ①②④

D. ①②③④

【答案】 A

【解析】 过 P 作 $PM \perp y$ 轴于 M ， $PN \perp x$ 轴于 N ，



$$\because P(2, 2),$$

$$\therefore PN = PM = 2,$$

$$\because x\text{轴} \perp y\text{轴},$$

$$\therefore \angle MON = \angle PNO = \angle PMO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MPN = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{四边形} MONP \text{是正方形},$$

$$\therefore OM = ON = PN = PM = 2,$$

$$\because \angle MPN = \angle APB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MPB = \angle NPA,$$

在 $\triangle MPB$ 与 $\triangle NPA$ 中

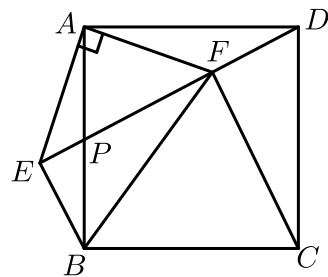
$$\begin{cases} \angle MPB = \angle NPA \\ \angle PMB = \angle PNA, \\ PM = PN \end{cases}$$

$$\therefore \triangle MPB \cong \triangle NPA \text{ (ASA)},$$

$\therefore PA = PB$ ，故①正确；
 $\therefore AN = BM$ ，
 $\therefore OA + OB = ON + NA + OB$
 $= ON + OB + BM$
 $= ON + OM$
 $= 2 + 2$
 $= 4$ ，
 当 $OA = OB$ 时，
 $OA = OB = 2$ ，
 $\therefore$ 点 A, B 分别与点 N, M 重合，
 此时四边形 $OAPB$ 是正方形，故②正确；
 $\therefore \triangle MPB \cong \triangle NPA$ ，
 $\therefore S_{\text{四边形}OAPB} = S_{\text{四边形}BONP} + S_{\triangle PNA}$
 $= S_{\text{四边形}BONP} + S_{\triangle MPB}$
 $= S_{\text{正方形}PMON}$
 $= 4$ ，
 $\therefore OA + OB = 4, PA = PB$ ，
 且 PA 和 PB 的长度不断变化，
 故周长不是定值，故③错误；
 $\therefore \angle AOB + \angle APB = 180^\circ$ ，
 $\therefore$ 点 A, O, B, P 共圆且 AB 为直径，
 $\therefore AB \geq OP$ ，故④错误。
 故选 A。

【标注】【知识点】对角互补模型

5. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， P 为 AB 的中点， $BE \perp PD$ 的延长线于点 E ，连接 $AE, BE, FA \perp AE$ 交 DP 于点 F ，连接 BF, FC ，下列结论：① $\triangle ABE \cong \triangle ADF$ ；② $FB = AB$ ；③ $CF \perp DP$ ；④ $FC = EF$ 其中正确的（ ）。



A. ①②④

B. ①③④

C. ①②③

D. ①②③④

【答案】 D

【解析】 ① $\because \angle EAB + \angle BAF = \angle EAF = 90^\circ$,

$$\angle DAF + \angle FAB = \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAB = \angle FAD,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle AED + \angle DEB = \angle AED + 90^\circ,$$

$$\angle AFD = \angle AED + \angle EAF = \angle AED + 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle AFD,$$

又 $\because$ 正方形 $ABCD$ 中, $AB = AD$,

$\therefore \triangle AEB$ 和 $\triangle AFD$ 中,

$$\begin{cases} \angle AEB = \angle AFD \\ \angle EAB = \angle FAD, \\ AB = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEB \cong \triangle AFD,$$

故①正确.

②取 EF 中点 M ，连接 AM

 BM
$$\therefore \triangle AEB \cong \triangle AFD,$$

$\therefore AE = AF$, 即 $\angle AEF = \angle AFE = 45^\circ$, $AM \perp EF$,

又 $\because EB \perp EF$,

$$\therefore AM \parallel BE,$$

又 $\because P$ 为 AB 中点,

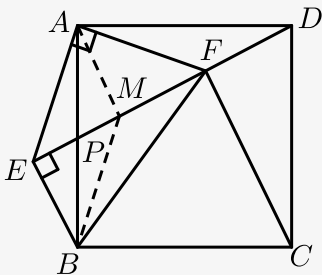
$$\therefore AM = BE,$$

$\therefore$ 四边形 $AEBM$ 为平行四边形,

$$\therefore \angle EBM = \angle EAM = 45^\circ,$$
$$\therefore \angle EBM = \angle EBA + \angle EAB = 45^\circ,$$
$$\therefore \angle EMB = \angle EBM = 45^\circ,$$
$$\therefore \angle AMB = \angle EMB + \angle AME = 135^\circ,$$
$$\angle FMB = \angle MEB + \angle EBM = 135^\circ,$$

则 $\triangle ABM$ 与 $\triangle FBM$ 中,

$$\begin{cases} AM = MF \\ \angle AMB = \angle FMB, \\ BM = BM \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABM \cong \triangle FBM,$$


$$\therefore AB = BF,$$

故②正确.

$$\textcircled{3} \text{ 由 } \textcircled{2} \text{ 得 } BF = AB = CD,$$

$$\angle BAM = \angle BFM,$$

$$\text{又} \because \text{Rt}\triangle APM \text{ 中, } \angle APM + \angle PAM = 90^\circ,$$

$$\text{Rt}\triangle EFB \text{ 中, } \angle EBF + \angle EFB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle APM = \angle EBF,$$

$$\text{又} \because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle APM = \angle FDC,$$

$$\text{由 } \textcircled{1} \text{ 得 } DF = BE,$$

则 $\triangle BEF$ 和 $\triangle DFC$ 中,

$$\begin{cases} BE = DF \\ \angle EBF = \angle FDC \\ BF = DC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BEF \cong \triangle DFC,$$

$$\therefore CF = EF,$$

$$\angle CFD = \angle BEF = 90^\circ,$$

$\therefore$ ③和④都正确.

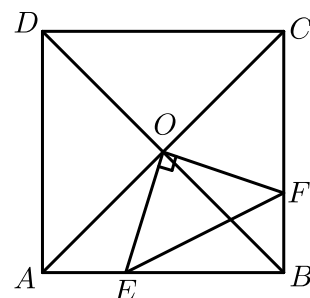
综上所述, ①②③④均正确.

【标注】【知识点】正方形与全等综合

6. 如图, 边长为1的正方形 $ABCD$ 的对角线交于点 O , 点 E 是边 AB 上一动点, 点 F 在边 BC 上, 且满足 $OE \perp OF$, 在点 E 由 A 运动到 B 的过程中, 以下结论:

- ① 线段 OE 的大小先变小后变大;
- ② 线段 EF 的大小先变大后变小;
- ③ 四边形 $OEBF$ 的面积先变大后变小.

正确的个数为 ().



A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】B

【解析】∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore OA = \frac{1}{2}AC, OB = \frac{1}{2}BD, AC = BD,$$

$$\angle OAB = \angle OBC = 45^\circ, AC \perp BD,$$

$$\therefore OA = OB, \angle OAE = \angle OBF, \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore OE \perp OF,$$

$$\therefore \angle EOF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOE + \angle EOB = \angle FOB + \angle EOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOE = \angle BOF,$$

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle BOF$ 中，

$$\begin{cases} \angle AOE = \angle BOF \\ OA = OB \\ \angle OAE = \angle OBF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle BOF (ASA),$$

$$\therefore S_{\text{四边形}OEBF} = S_{\triangle OEB} + S_{\triangle BOF} = S_{\triangle OEB} + S_{\triangle AOE} = S_{\triangle AOB} \text{是定值, 故③错},$$

$$\therefore OE = OF,$$

$$\therefore EF = \sqrt{2}OE,$$

E 在从 A 到 B 的过程中， OE 先从大变小，再从小变大，故①对，

$$\therefore EF = \sqrt{2}OE \text{先从大变小，再从小变大，故②错}.$$

故选B.

【标注】【知识点】正方形与全等综合

二、手拉手模型

7. 解答题

(1) 作图发现

如图1，已知 $\triangle ABC$ ，小涵同学以 AB 、 AC 为边向 $\triangle ABC$ 外作等边 $\triangle ABD$ 和等边 $\triangle ACE$ ，连接 BE ， CD 。这时他发现 BE 与 CD 的数量关系是 _____，请加以证明。

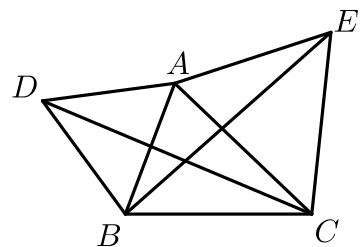


图 1

(2) 探究

如图2，已知 $\triangle ABC$ ，小涵同学以 AB 、 AC 为边向外作正方形 $ABFD$ 和正方形 $ACGE$ ，连接 BE 、 CD ，试判断 BE 与 CD 之间的数量关系，并说明理由。

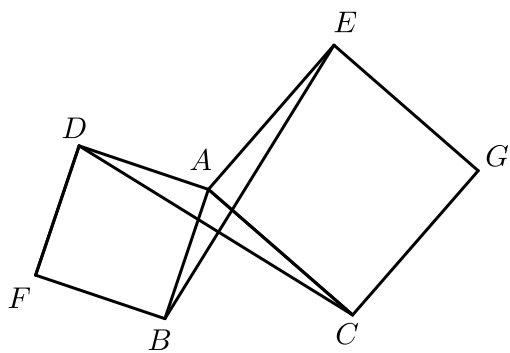


图 2

【答案】 (1) $BE = CD$.

(2) $BE = CD$ ，证明见解析。

【解析】 (1) $\because \triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 都是等边三角形，

$$\therefore AD = AB, AC = AE, \angle BAD = \angle CAE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle BAC = \angle CAE + \angle BAC, \text{ 即 } \angle CAD = \angle EAB,$$

在 $\triangle CAD$ 和 $\triangle EAB$ 中，

$$\therefore \begin{cases} AD = AB \\ \angle CAD = \angle EAB, \\ AC = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CAD \cong \triangle EAB (\text{SAS}),$$

$$\therefore BE = CD.$$

(2) $\because$ 四边形 $ABFD$ 和 $ACGE$ 均为正方形，

$$\therefore AD = AB, AC = AE, \angle BAD = \angle CAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle EAB,$$

$\therefore$ 在 $\triangle CAD$ 和 $\triangle EAB$ 中，

$$\begin{cases} AD = AB \\ \angle CAD = \angle EAB, \\ AC = AE \end{cases}$$

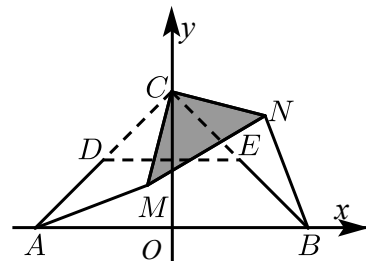
$$\therefore \triangle CAD \cong \triangle EAB (\text{SAS}),$$

$$\therefore BE = CD.$$

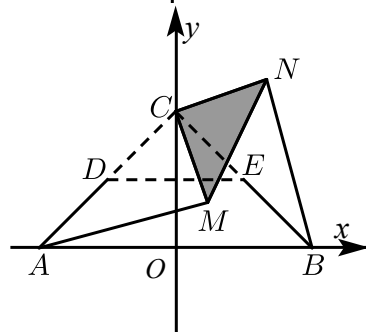
【标注】【知识点】正方形与全等综合

8. 在平面直角坐标系中，点 $A(-2, 0)$ ， $B(2, 0)$ ， $C(0, 2)$ ，点 D 、 E 分别是 AC ， BC 的中点，将 $\triangle CDE$ 绕点 C 逆时针旋转得 $\triangle CMN$ ，点 M ， N 分别是点 D ， E 旋转后的对应点，记旋转角 α 。

(1) 如图，求证 $AM = BN$ 。



(2) 如图，当 $\alpha = 75^\circ$ 时，求点 N 的坐标。



(3) 当 $AM \parallel CN$ ，求 BN 的长（直接写出结果即可）。

【答案】(1) 证明见解析。

$$(2) N\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{4 + \sqrt{2}}{2}\right).$$

$$(3) \sqrt{6}.$$

【解析】(1) $\because A(-2, 0)$ ， $B(2, 0)$ ， $C(0, 2)$ ，

$$\therefore OA = OB = OC, \text{ 且 } \angle AOC = \angle BOC,$$

$$\therefore \triangle AOC \cong \triangle BOC,$$

$$\therefore AC = BC,$$

$$\because D, E \text{ 分别是 } AC, BC \text{ 的中点},$$

$$\therefore DC = CE,$$

$$\because \triangle MCN \text{ 是 } \triangle DCE \text{ 旋转得到的},$$

$$\therefore \angle ACM = \angle BCN, CM = CD, CE = CN,$$

$$\therefore CM = CN \text{ 且 } \angle ACM = \angle BCN, AC = BC,$$

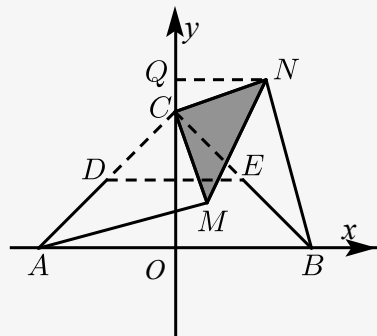
$$\therefore \triangle ACM \cong \triangle BCN,$$

$$\therefore AM = BN.$$

(2) 如图. $\because \angle BCO = 45^\circ$, $\angle BCN = \angle \alpha = 75^\circ$,

$$\therefore \angle OCN = 120^\circ,$$

过点作 $NQ \perp y$ 轴, Q 为垂足.



$$\therefore \angle NCQ = 60^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BCO \text{ 中, } BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore CE = CN = \sqrt{2},$$

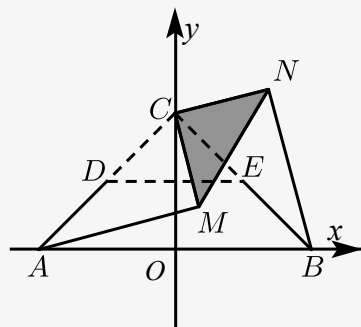
$$\text{在 Rt}\triangle NCQ \text{ 中, } \angle NCQ = 60^\circ, \therefore \angle QNC = 30^\circ,$$

$$\therefore CQ = \frac{1}{2}CN = \frac{\sqrt{2}}{2}, NQ = \sqrt{3}CQ = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore OQ = CO + CQ = \frac{4 + \sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore N\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{4 + \sqrt{2}}{2}\right).$$

(3) 如图,



$$\text{当 } AM \parallel CN \text{ 时, } \therefore \angle MCN = \angle AMC = 90^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACM \text{ 中, } AC = 2\sqrt{2}, CM = \sqrt{2},$$

$$\therefore AM = \sqrt{AC^2 - CM^2} = \sqrt{8 - 2} = \sqrt{6},$$

$$\therefore AM = BN,$$

$$\therefore BN = \sqrt{6}.$$

【标注】【知识点】象限内坐标的特征